第3章 周期信号的傅里叶级数表示

3.1连续时间周期信号的傅里叶级数表示(CTFS)

(1)复指数函数作为线性时不变系统的特征函数

(2)连续时间周期信号的傅里叶级数表示

(3)计算傅里叶系数

(4)CTFS的性质

基信号的特性

a.我们可以用这些基来构建一类信号;

b.线性时不变系统对这些基信号的响应是非常简单的;

以往的焦点：单位抽样信号和冲击

现在的焦点：线性时不变系统的特征函数

特征函数和它的特性

（这里关注连续时间系统，但对离散时间系统也同样适用）

$$\phi_k(t) \rightarrow \boxed{\text{系统}} \rightarrow \lambda_k \phi_k(t)$$

特征值　　特征函数

输入特征函数 → 带有增益的输出函数

由线性时不变系统的叠加特性

$$x(t)=\sum_k a_k\phi_k(t)\rightarrow \boxed{\text{线性时不变系统}}$$

$$\rightarrow y(t)=\sum_k \lambda_k a_k\phi_k(t)$$

现在确定线性时不变系统的响应即是确定 λ_k

复指数可作为任何线性时不变系统的特征函数

$$x(t)=e^{st}\rightarrow\boxed{h(t)}\rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]e^{st}$$

$$=H(s)e^{st}$$

特征值　　特征函数

$$x[n] = z^n \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m}$$

$$= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m} \right] z^n$$

$$= H(z) z^n$$

特征值　　特征函数

$$x(t) \xrightarrow{\quad e^{st} \quad} \boxed{h(t)} \xrightarrow{\quad H(s)e^{st} \quad} y(t)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow y(t) = \sum_k H(s_k)\, a_k e^{s_k t}$$

离散时间系统：

$$x[n] \xrightarrow{z_k^n} \boxed{h[n]} \xrightarrow{H(z_k)z_k^n} y[n]$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \to y[n] = \sum_k H(z_k) a_k z_k^n$$

什么样的信号可以表示为复指数的和？

这里关注限定的复指数

连续时间系统：$s = j\omega$——纯虚数

例如：形式为$e^{j\omega t}$的信号

离散时间系统：$z = e^{j\omega}$ 幅值1

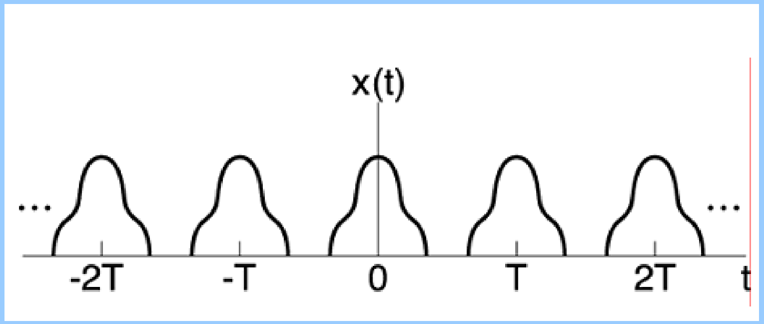
例如：形式为$e^{j\omega n}$的信号

$\Downarrow$

连续与离散周期信号的傅里叶级数与傅里叶变换

连续周期信号的傅里叶级数表示

$x(t)=x(t+T)$　t取任意值



这里最小的T是基本周期

$\omega_0=\dfrac{2\pi}{\mathrm{T}}$　是基本频率

$e^{j\omega t}$ 以T为周期的周期函数 $\Rightarrow \omega = k\omega_0$

$\Downarrow$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi t/T}$$

- 以T为周期的周期函数
- $\{a_k\}$ 是傅里叶级数的系数
- k=0 直流
- k=±1 一次谐波
- k=±2 二次谐波

问题1：我们怎样得到傅里叶系数？

首先，简单周期信号由几个正弦项组成

例如：

$$x(t) = \cos 4\pi t + 2\sin 8\pi t$$

公式

（欧拉定理）

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right] + \frac{2}{2j}\left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}\right]$$

$$\omega_0 = 4\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = 0$$ 无直流分量

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{j}$$

$$a_{-2} = -\frac{1}{j}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_{-3} = 0$$

$$\vdots$$

对于实周期信号，傅里叶级数还有其他两种常用的形式

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \cos k\omega_o t + \beta_k \sin k\omega_o t \right]$$

或者

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_k \cos\left(k\omega_o t + \theta_k \right) \right]$$

由于 $e^{j\omega t}$ 的特征函数性质，我们通常使用复指数形式

这样做的结果是，我们需要包括正负两个频率项

$$e^{j\omega t} \qquad\qquad e^{-j\omega t}$$

注意

$$\cos\left(k\omega_0 t\right)=\frac{1}{2}\left(e^{jk\omega_0 t}+e^{-jk\omega_0 t}\right)$$

$$\sin\left(k\omega_0 t\right)=\frac{1}{2j}\left(e^{jk\omega_0 t}-e^{-jk\omega_0 t}\right)$$

现在对问题一给出完整答案

（给出 $x(t)$ 如何找出 a_k ）

假设

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

1）乘以 $e^{-jn\omega_0 t}$
2）在一个周期内积分

$$\Downarrow$$

1）乘以 $e^{-jn\omega_0 t}$
2）在一个周期内积分

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right)$$

这里 $\int_T$ 表示积分任意长度为T（一个周期）的积分区间

然后注意到：

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T, k = n \\ 0, k \neq n \end{cases} = T\delta[k-n]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot T\delta[k-n]$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n T$$

$$\Downarrow$$

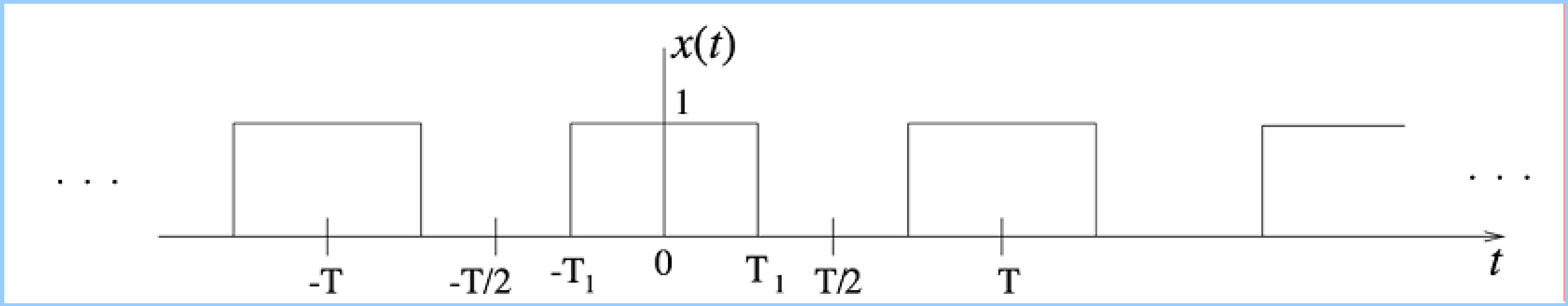
连续时间周期信号的Fourier级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\,(\text{合成方程})$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\,(\text{解析方程})$$

其中 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

例如：周期性方波



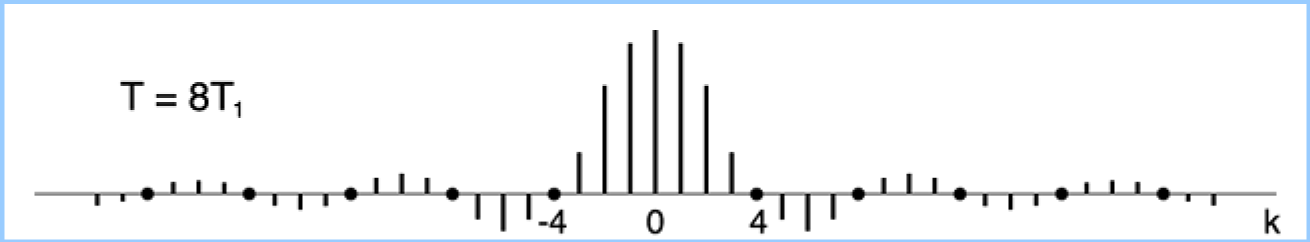
当k=0

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{2T_1}{T}$$

当k≠0

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= -\frac{1}{-jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$



连续时间傅里叶级数对

$$(\omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}})$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi t/T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

直接记住，

将来跳过此运算过程

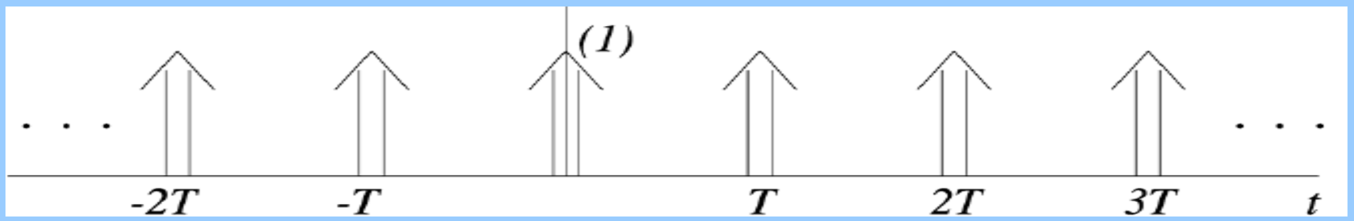
$$x(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

另一个例子（重要！）：周期脉冲序列

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

——采样公式，

对于采样很重要



$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}$$ 对于所有k均成立！

$$\Downarrow$$

$$x(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_0 t}$$

——所有的成分均含有：

(1)相同的振幅；

(2)相同的相位。

连续时间傅里叶级数的几个性质

- **线性** $x(t)\leftrightarrow a_k, y(t)\leftrightarrow b_k \quad \Rightarrow \alpha x(t)+\beta y(t)\leftrightarrow \alpha a_k+\beta b_K$
- **共轭对称性**

$$\text{x(t)是实数} \Rightarrow a_{-k}=a_k^*$$

$$\Downarrow$$

$$a_k=\mathrm{Re}\{a_k\}+j\,\mathrm{Im}\{a_k\}$$

$$=|a_k|e^{j\angle a_k}$$

$\mathrm{Re}\{a_k\}$是偶的,$\mathrm{Im}\{a_k\}$是奇的

或者说

$|a_k|$是偶的，$\angle a_k$是奇的

- **时移性** $x(t)\leftrightarrow a_k$

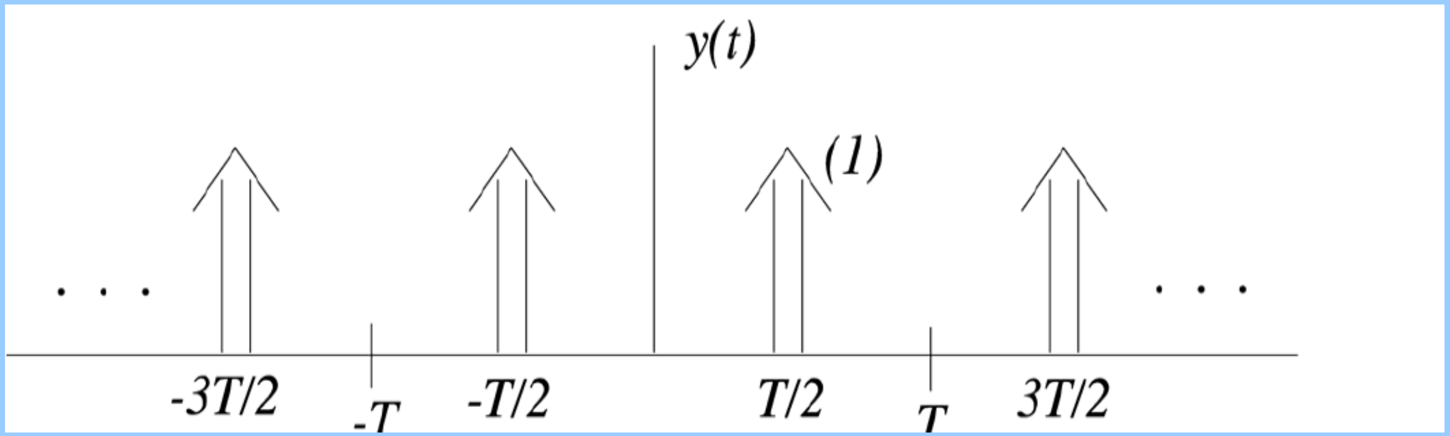
$$x(t-t_0)\leftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0}=a_k e^{-jk2\pi t_0/T}$$

引入一个线性相移

例子：移动半个周期

$$y(t)=x(t-T/2)\leftrightarrow a_k e^{-jk\pi}=(-1)^k a_k$$

用：$e^{-jk\omega_0 T/2}=e^{-jk\pi}$



$$y(t)\leftrightarrow(-1)^k a_k \qquad \left(a_k=\frac{1}{T}=F.C.of\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right)$$

$$||$$

$$\frac{(-1)^k}{T}$$

- 帕塞瓦尔定理

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt}_{\text{平均信号功率}} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2}_{\text{在}k_{th}\text{谐波处的功率}}$$

无论在时间域还是频率域能量也具有相同的关系

- 乘积性质

$$x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k$$ （无论x(t),y(t)均以T为周期）

$$\Downarrow$$

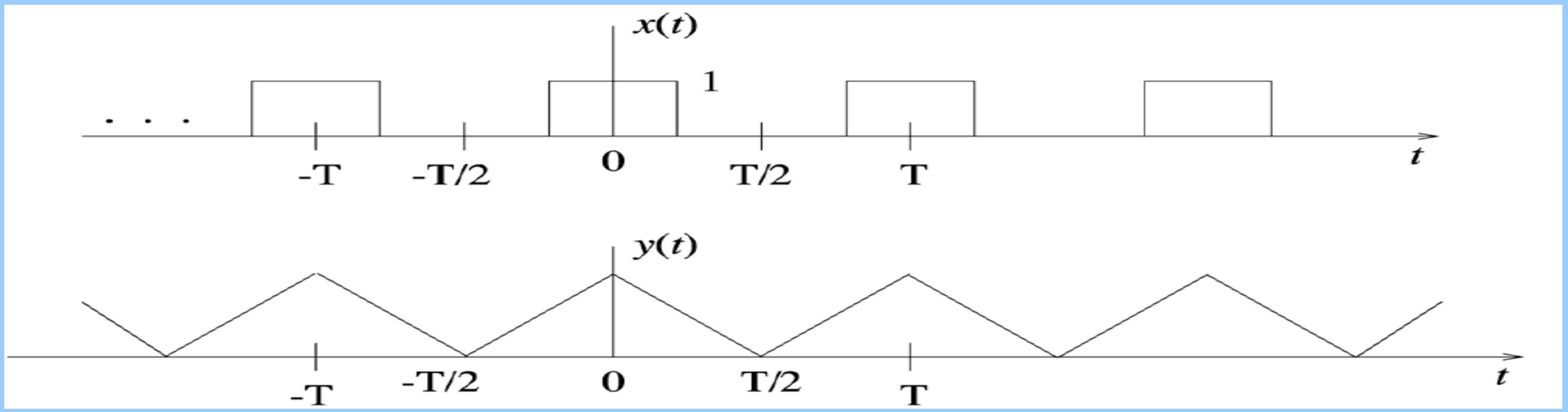
$$x(t).y(t) \leftrightarrow c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$$

证明：

$$\underbrace{\sum_l a_l e^{jl\omega_0 t}}_{x(t)} . \underbrace{\sum_m b_m e^{jm\omega_0 t}}_{y(t)} = \sum_{l,m} a_l b_m e^{j(l+m)\omega_0 t} \xrightarrow{l+m=k} \sum_k [\underbrace{\sum_l a_l b_{k-l}]}_{c_k} e^{jk\omega_0 t}$$

周期卷积

x(t),y(t)均以T为周期



$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$ ——并不十分有意义

例如：假设x(t),y(t)均为正数，则

$$x(t)*y(t)=\infty$$

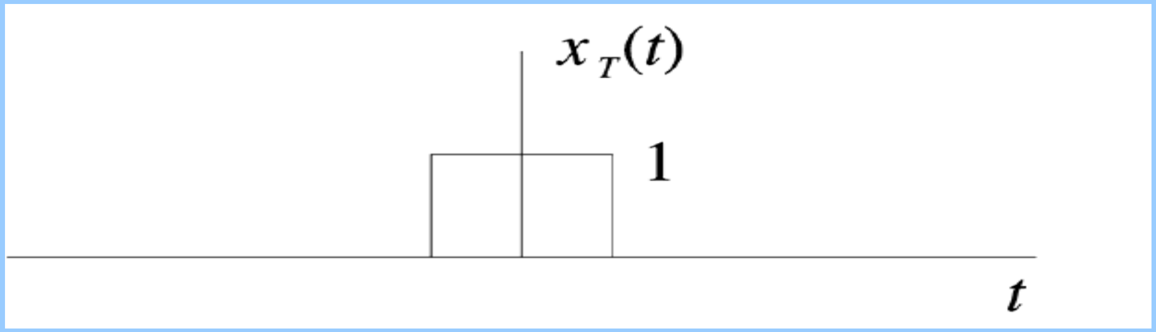
周期卷积

周期卷积：可以在任意一个周期上求积分（如-T/2—T/2）

$$z(t)=\int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

当

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t) & -T/2<t<T/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



周期卷积实质

1）Z(t)是以T为周期的

对于LTI系统 $x(t)=x(t+T)\rightarrow y(t)=y(t+T)$

在卷积中，把y(t)当做输入，$x_T(t)$当做h(t)。

2）我们可以选任意周期做积分：

$$z(t)=\int_{\mathrm{T}} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = x(t)\otimes y(t)$$

3）时间域

周期卷积

$$x(t)\leftrightarrow a_k,\ y(t)\leftrightarrow b_k,\ z(t)\leftrightarrow c_k$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_T\left(\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\int_T \underbrace{\left(\frac{1}{T}\int_T y(t-\tau)e^{-jk\omega_0(t-\tau)}dt\right)}_{b_k} x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

$$=\int_T b_k x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau=Ta_k b_k$$

频率域乘法！

连续时间周期信号的频谱计算

（1）拼凑法（适用于三角函数信号）：利用欧拉公式等写成傅里叶级数综合公式形式，然后指出系数a_k，例3.2、3.3、3.4；

（2）根据定义式计算：代入傅里叶级数分析公式，直接计算a_k，例3.5；

（3）利用傅里叶级数性质计算：以相关联的某已知简单信号的频谱作为基础，根据时频域关联性计算待求的复杂频谱a_k，例3.6，3.7，3.8。

一般情况下，直流分量a_0需要直接根据定义式计算。

自学例3.6-3.9

3.2离散时间周期信号的傅里叶级数表示(DTFS)

- x[n]——以N为基本周期，基频

$$x[n+N]=x[n] 且 \omega_0=\frac{2\pi}{N}$$

- 仅仅以N为周期的$e^{j\omega n}$会出现在FS中

ω:

$$\omega N=k2\pi \Leftrightarrow k\omega_0, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

- 仅有这种形式的N个离散信号

$2\pi n$

$$e^{j(k+N)\omega_0 n}=e^{jk\omega_0 n}e^{jN\omega_0 n}=e^{jk\omega_0 n}$$

- 因此我们仅能够使用

$$e^{j0\omega_0 n}, e^{j1\omega_0 n}, e^{j2\omega_0 n}, \ldots, e^{j(N-1)\omega_0 n}$$

离散时间傅里叶级数表示

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$\sum_{k=<N>}$ = 对于任意N，连续的k值的和

——这是有限级数

$\{a_k\}$——傅里叶（级数）系数

问题：

1）什么样的离散时间周期信号有如此表示方式？

2）我们怎样找到 a_k ？

回答问题#1

任何一个离散时间周期信号都有一个傅里叶级数表示。

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Downarrow$$

$$x[0]=\sum_{k=<N>} a_k$$

$$x[1]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0}$$

$$x[2]=\sum_{k=<N>} a_k e^{j2k\omega_0}$$

.

.

.

$$x[N-1]=\sum_{k=<N>} a_k e^{j(N-1)k\omega_0}$$

N个方程为了求N个未知数：$a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$

一个更直接的方法来求解a_k

有限几何级数

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & ,\alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ,\alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad \alpha = e^{jk\omega_0}$$

$$\sum_{n=<N>} e^{jk\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{jk\omega_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{jk2\pi/N}\right)^n$$

$$= \begin{cases} N & ,k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{jk\omega_0}} = 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

一个周期内具有冲激的特性，实际上是周期为N的冲激串。

因此，由 $x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$

$$\Downarrow$$

两边均乘以 $e^{-jm\omega_0 n}$

然后 $\sum_{n=<N>}$

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jm\omega_0 n} = \sum_{n=<N>}\left(\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}\right)e^{-jm\omega_0 n}$$

$$= \sum_{k=<N>} a_k \underbrace{\left(\sum_{n=<N>} e^{j(k-m)\omega_0 n}\right)}_{=N\cdot\delta[k-m]-\text{正交}}$$

$$=Na_m$$

$$\Downarrow$$

离散时间傅里叶级数对$\left(\omega_0=\frac{2\pi}{N}\right)$

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \qquad \text{（综合方程）}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n} \qquad \text{（分析方程）}$$

把 a_k看作是在所有整数K上被定义是方便的，因此：

1） $a_{k+N}=a_k$ ——离散时间傅里叶系数的特殊性质；

2）在综合方程中我们仅仅使用N个连续的a_k值（x[n]是周期的，无论时间域还是频率域它均被N个数指定）。

例#1：一对正弦曲线求和

$$x[n]=\cos(\pi n/8)+\cos(\pi n/4+\pi/4)$$

—以N=16为周期 $\Rightarrow \omega_0=\pi/8$

$$x[n]=\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}\right]+\frac{1}{2}\left[e^{j\pi/4}e^{j2\omega_0 n}+e^{-j\pi/4}e^{-j2\omega_0 n}\right]$$

$$\Downarrow$$

$a_0=0$

$a_1=1/2$

$a_{-1}=1/2$

$a_2=e^{j\pi/4}/2$

$a_{-2}=e^{-j\pi/4}/2$

$a_3=0$

$a_{-3}=0$

–

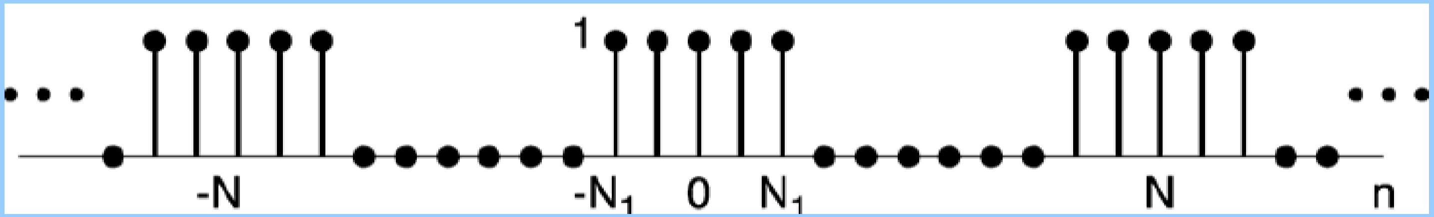
–

–

$a_{15}=a_{-1+16}=a_{-1}=1/2$

$a_{66}=a_{2+4\times16}=a_2=e^{j\pi/4}/2$

例#2：离散时间方波



$$a_0=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}x[n]=\frac{2N_1+1}{N}=a_N=a_{-N}=a_{6N}=\dots$$

因为k ≠ N的倍数：　　　　用$n=m-N_1$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1}e^{-jk\omega_0(m-N_1)}$$

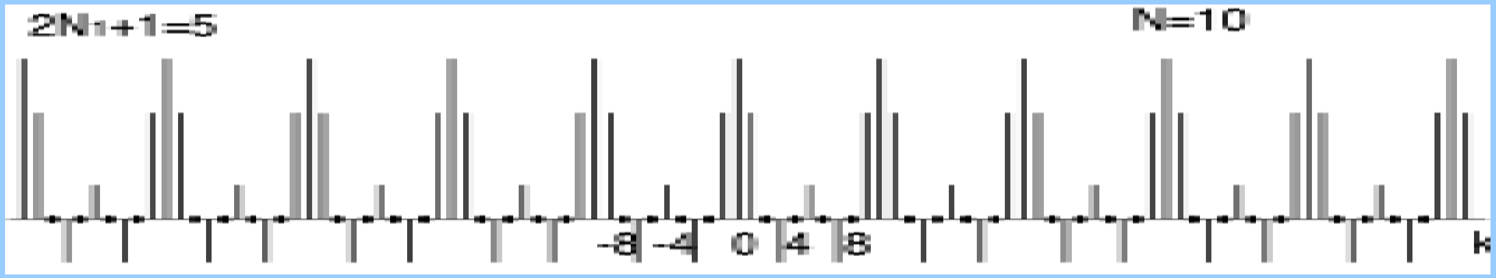
$$=\frac{1}{N}e^{jk\omega_0 N_1}\sum_{m=0}^{2N_1}(e^{-jk\omega_0})^m=\frac{1}{N}e^{jk\omega_0 N_1}\frac{1-e^{-jk\omega_0(2N_1+1)}}{1-e^{jk\omega_0}}$$

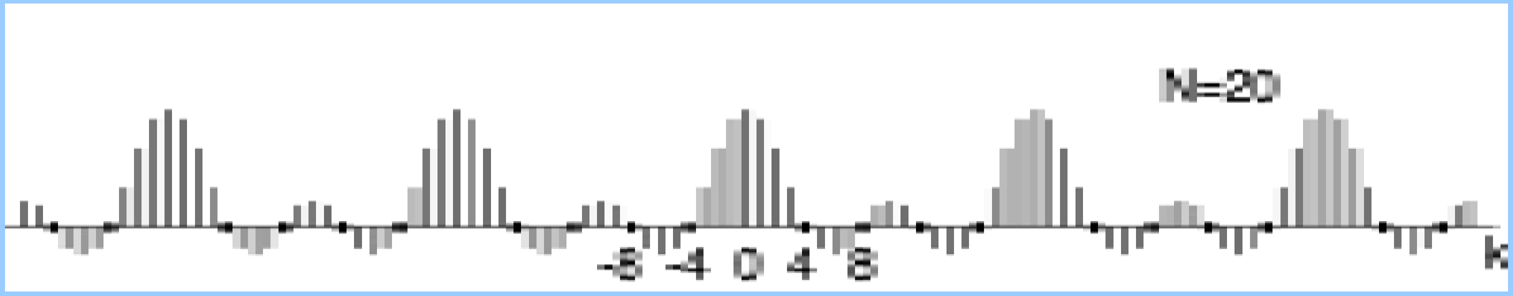
$$=\frac{1}{N}\frac{\sin[k(N_1+1/2)\omega_0]}{\sin(k\omega_0/2)}=\frac{1}{N}\frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}$$

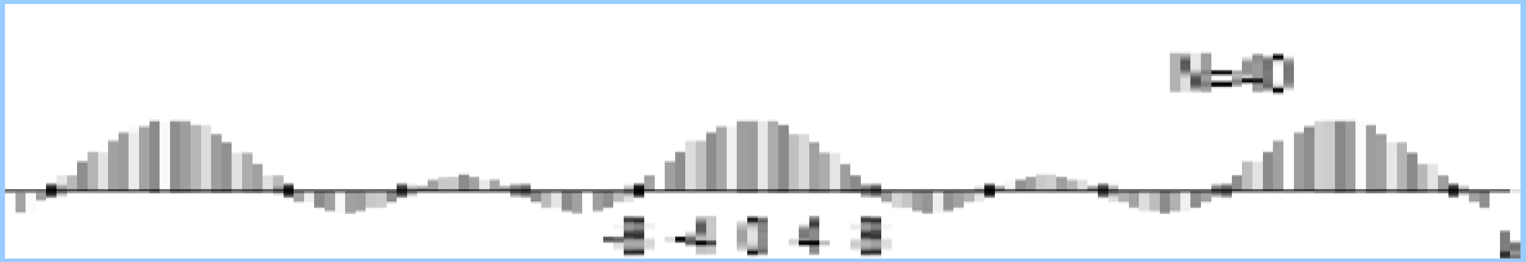
$$\Downarrow$$

例#2：离散时间方波

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}$$







离散时间傅里叶级数的收敛问题：

不是一个问题，因为所有的级数都是一个有限的和。

离散时间傅里叶级数的性质：很多，与连续时间傅里叶级数一样。

$$x[n] \leftrightarrow a_k$$

$$e^{jM\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow b_k = ?$$

例如：

$$x[n]e^{jM\omega_0 n} = \sum_{r=<N>} a_r e^{jr\omega_0 n} e^{jM\omega_0 n}$$

$$\overset{k=r+M}{=} \sum_{k=<N>} a_{k-M} e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Downarrow$$

$$b_k = a_{k-M}$$

频移

$$jk\omega_0 \to j(k-M)\omega_0$$

习题:

例3.3,例3.4,例3.5,例3.6,例3.7,例3.8,例3.9;

例3.10,例3.11,例3.12,例3.13,例3.14

[再讲]周期序列的傅立叶级数（DFS-Discrete Fourier Series）

周期序列的另一种写法：

一个周期为N的周期序列 $\tilde{x}[n]$，对于所有n满足

$$\tilde{x}[n]=\tilde{x}[n+kN],k\text{为整数}$$

式中N为正整数。

定义n=0到N-1的周期区间为 $\tilde{x}[n]$的**主值区间**，而主值区间内的N个样本值组成的有限长序列称为$\tilde{x}[n]$的**主值序列**，即这一过程称为取主值序列。

对于一个有限长序列

$$x[n]=\begin{cases}x[n] & 0\le n\le N-1\\ 0 & n\text{为其它值}\end{cases}$$

如将其以N为周期进行周期性延拓，得到周期序列 $\tilde{x}[n]$ 。

DFS的另一种写法:

正变换(分析式):

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

反变换（综合式）：

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

3.3　离散傅立叶级数的性质

假定 $\tilde{x}_1(n)$和 $\tilde{x}_2(n)$是周期皆为N的两个离散周期序列，它们的DFS为

$$\tilde{X}_1(k)=DFS[\tilde{x}_1(n)] \qquad \tilde{X}_2(k)=DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

1、线性

$$DFS[a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)]=a\tilde{X}_1(k)+b\tilde{X}_2(k)$$

式中a,b为任意常数，可见由两个离散周期序列$\tilde{x}_1(n)$和$\tilde{x}_2(n)$线性组合成一个新的周期序列 $a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)$的DFS也是周期为N的离散周期序列。

2、移位特性

时域移位 $DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$

频域移位 $IDFS[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{l\,n}\tilde{x}(n)$

如果 $m, l \geqslant$N, 那么

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-m'k}\tilde{X}(k), \qquad m' = m(\mathrm{mod}\,N)$$

$$IDFS[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{l'n}\tilde{x}(n), \qquad l' = l(\mathrm{mod}\,N)$$

证明：

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n+m)W_N^{nk} = \sum_{i=m}^{N-1+m}\tilde{x}(i)W_N^{ik}W_N^{-mk}$$

$$= W_N^{-mk}\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}(i)W_N^{ik} = W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

$$DFS[W_N^{\ln}\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1}W_N^{nl}\tilde{x}(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{(l+k)n} = \tilde{X}(k+l)$$

3、时域卷积特性

两个周期都为N的周期序列$\tilde{x}_1(n)$和$\tilde{x}_2(n)$，它们卷积的结果也是周期为N的周期序列，即

$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

m的取值由0～（N-1），因此称为周期卷积。

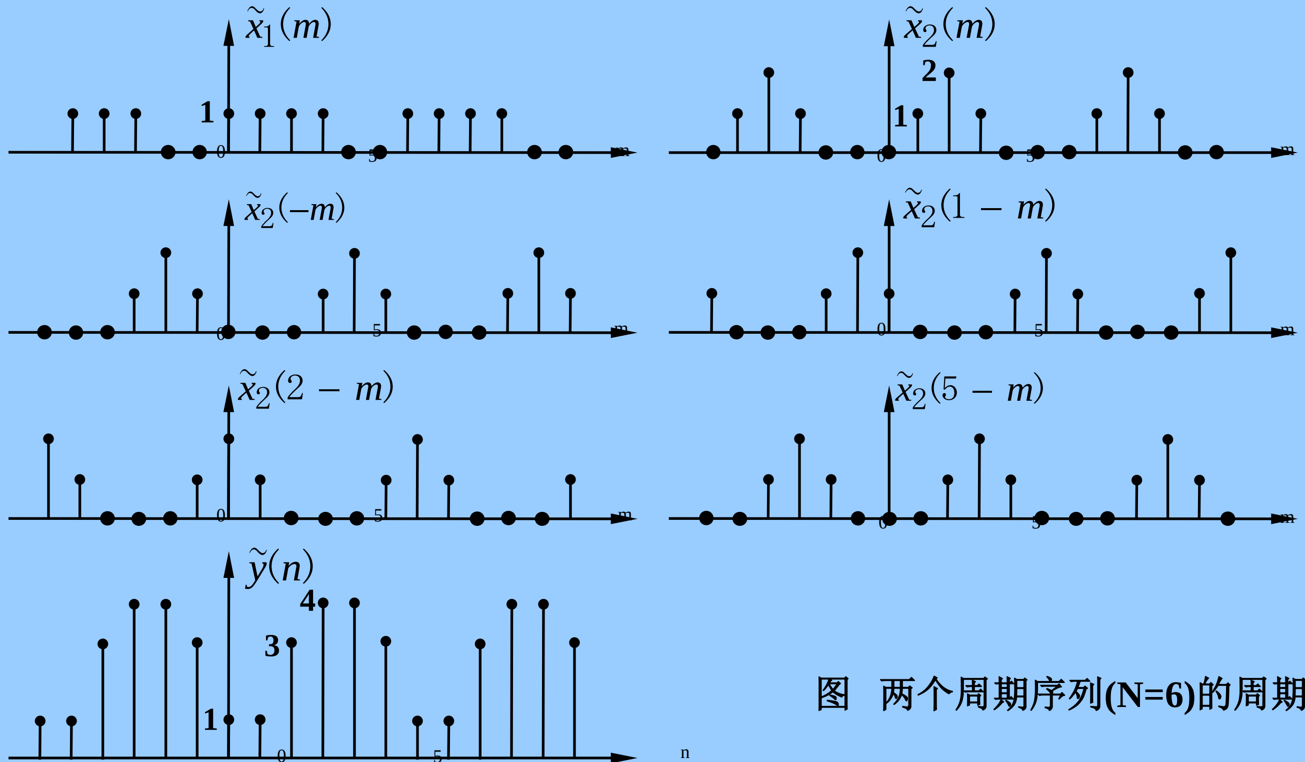


图 两个周期序列(N=6)的周期卷积过程

周期卷积与DFS的关系如下：

设 $$\tilde{X}_1(k)=DFS[\tilde{x}_1(n)]$$
$$\tilde{X}_2(k)=DFS[\tilde{x}_2(n)]$$
$$\tilde{Y}(k)=DFS[\tilde{y}(n)]$$

若 $$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

则有 $$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$$

这就是时域卷积定理。

证明：$\tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{y}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{nk}$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} [\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)] W_N^{nk}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2(n-m) W_N^{(n-m)k} W_N^{mk}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) W_N^{mk} \sum_{m'=-m}^{N-1-m} \tilde{x}_2(m') W_N^{m'k}$$

$$= \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

4、频域卷积特性

对于时域周期序列的乘积，同样对应于频域的周期卷积。

若 $$\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)\cdot\tilde{x}_2(n)$$

则 $$\tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{y}(n)] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l)$$

[内容延伸]　离散傅立叶变换ＤＦＴ

设x(n)是长度为N的有限长序列，可以把它看作是周期为N的周期序列$\tilde{x}(n)$的一个主周期，即

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & n\text{为其它值}\end{cases}=\tilde{x}(n)R_N(n)$$

而将$\tilde{x}(n)$看作是x(n)以N为周期进行周期延拓的结果，表为

$$\tilde{x}(n)=x((n))_N$$

同理

$$\tilde{X}(k)=X((k))_N \quad , \quad X(k)=\tilde{X}(k)\cdot R_N(k)$$

则周期序列$\tilde{x}(n)$在一个周期内的DFS，叫做有限长序列x(n)的离散傅立叶变换.

离散傅立叶变换 DFT

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

正变换（分析式）

$$X(k) = \tilde{X}(k) \cdot R_N(k) = \{DFS[\tilde{x}(n)]\}R_N(k)$$

$$= [\sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N W_N^{nk}]R_N(k)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

反变换（综合式）

$$x(n) = \tilde{x}(n) \cdot R_N(n) = \{IDFS[\tilde{X}(k)]\}R_N(n)$$

$$= [\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X((k))_N W_N^{-nk}]R_N(n)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \qquad 0 \le n \le N-1$$

即：

正变换（分析式）

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}, \qquad 0\le k\le N-1$$

反变换（综合式）

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}, \qquad 0\le n\le N-1$$

注：有限长序列的离散傅立叶变换DFT，本质上是该序列周期延拓后的DFS。隐含周期性假设不可忽略！

注：

$$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$